



# Les éléments thermoélastiques axisymétriques de la bibliothèque MODULEF

Paul-Louis George

## ► To cite this version:

Paul-Louis George. Les éléments thermoélastiques axisymétriques de la bibliothèque MODULEF. RT-0053, INRIA. 1985, pp.45. inria-00070105

**HAL Id: inria-00070105**

**<https://inria.hal.science/inria-00070105>**

Submitted on 19 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



CENTRE DE ROCQUENCOURT

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
B.P. 105  
78153 Le Chesnay Cedex  
France  
Tél. (3) 954 90 20

Rapports Techniques

N° 53

**LES ÉLÉMENTS  
THERMOÉLASTIQUES  
AXISYMÉTRIQUES  
DE LA BIBLIOTHÈQUE  
MODULE F**

**Paul Louis GEORGE**

**Mai 1985**

LES ELEMENTS THERMOELASTIQUES  
AXISYMETRIQUES DE LA BIBLIOTHEQUE  
MODULEF

Paul Louis GEORGE

Résumé

Ce papier présente les 4 éléments thermoélastiques axisymétriques de la bibliothèque MODULEF.

Après avoir rappelé le système de l'élasticité tridimensionnelle, nous montrons sa forme particulière dans le cas axisymétrique.

La méthode des Eléments Finis nous permet d'introduire les matrices et second membre élémentaires que nous écrivons d'une manière formelle bien adaptée aux calculs sur ordinateur.

Une description complète de chaque élément fini est donnée en précisant, en particulier, les quadratures utilisées.

Abstract

The four axisymmetric elements included in the MODULEF library, for elasticity problem with thermal effect are described in this paper.

We write the particular case of axisymmetry in tridimensional elasticity problems.

Using Finite Element method we introduce elementary matrices and right hand sides. A formal written, convenient for computer, is shown.

Furthermore full description of each element is given and quadrature formulae are detailed.



PAPIER RÉCUPÉRÉ ET RECYCLÉ

## I. ELASTICITE 3D ET AXISYMETRIE

- 1.1. Modélisation en E.D.P.
- 1.2. Le cas axisymétrique
- 1.3. Cas homogène isotrope
- 1.4. Cas général

## II. DES E.D.P. AUX QUANTITES ELEMENTAIRES

## III. POINT DE VUE ELEMENTAIRE

## IV. TABLEAUX ELEMENTAIRES

- 4.1. Masse
- 4.2. Rigidité
- 4.3. Second membre
- 4.4. Contraintes

## V. INTEGRATION NUMERIQUE

- 5.1. Intégration numérique de surface
- 5.2. Intégration numérique de bord
  - 5.2.1. Degré un
  - 5.2.2. Degré deux

## VI. DESCRIPTION DES QUATRE ELEMENTS

- 6.1. Triangle à 3 noeuds
- 6.2. Quadrangle à 4 noeuds
- 6.3. Triangle à 6 noeuds
- 6.4. Quadrangle à 8 noeuds

## VII. PROBLEME MODELE

- 7.1. Tube en traction
- 7.2. Tube sous pression intérieure
- 7.3. Tube sous force radiale

## VIII. IMPLEMENTATION MODULEF

- 8.1. Récapitulation
- 8.2. Utilisation

ANNEXE TECHNIQUE : la fiche technique de chaque élément.

# I. ELASTICITE TRIDIMENSIONNELLE ET AXISYMETRIE

## 1.1. Modélisation en équations aux dérivées partielles

Nous considérons le problème de l'élasticité linéaire tridimensionnelle formulé en "déplacements" sur un domaine  $\Omega$ . Le milieu continu est fixé sur une partie  $\Gamma_0$  de sa frontière, il est soumis à une distribution de forces de surface sur  $\Gamma_1$  le complément de la frontière, de plus une distribution de forces volumiques est appliquée.

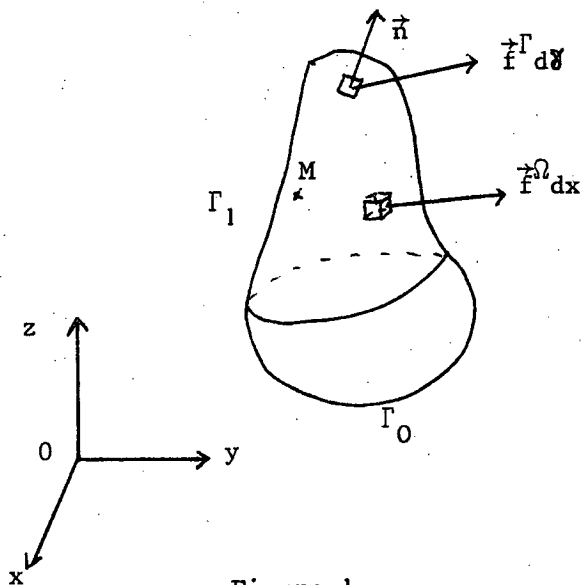


Figure 1

Sous l'action du champ des forces extérieures, de volume  $\vec{f}^\Omega$  et de surface  $\vec{f}^\Gamma$ , le milieu continu  $\Omega$  se déforme.

Le problème est de déterminer le champ des déplacements  $\vec{u}$  en tout point  $M$  de  $\Omega$ , ainsi que le champ des contraintes  $\vec{\sigma}$ .

Si  $u_i(x,y,z)_{i=1,3}$  dénote le champ des déplacements au point  $M(x,y,z)$  dans le repère  $(0, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ , on peut modéliser le problème par le système suivant :

$$\begin{aligned}
 (1.1) \quad & \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}(x,y,z,t) - \sigma_{ij,j}(\vec{u}) = f_i^\Omega \quad \text{dans } \Omega \\
 (1.2) \quad (P) \quad & \left\{ \begin{aligned} \sigma_{ij} n_j &= f_i^\Gamma && \text{sur } \Gamma_1 \\ u_i &= \bar{u}_i && \text{sur } \Gamma_0 . \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Les indices varient de 1 à 3 et la convention d'Einstein sur l'indice  $j$  est prise.

D'autre part  $t$  désigne le temps et  $n_j$  les composantes de la normale. Dans le cas statique, le terme  $\partial^2/\partial t^2$  de (1.1) disparaît.

Le tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}$  est relié au tenseur des déformations  $\epsilon_{ij}$  par la loi de comportement suivante :

$$(1.4) \quad \sigma_{ij}(\vec{u}) = E_{ijkh}[\epsilon_{kh}(\vec{u}) - \epsilon_{kh}^{\theta}] + \sigma_{ij}^0(\vec{u})$$

$$\text{où : } \epsilon_{ij}(\vec{u}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

$\epsilon_{ij}^{\theta}$  désigne le tenseur des déformations thermiques

$$\epsilon_{ij}^{\theta} = \alpha_{ij}(\theta - \theta_0)$$

$\alpha_{ij}$  coefficient de couplage thermique

$\theta$  la température

$\theta_0$  la température de référence

$\sigma_{ij}^0(\vec{u})$  désigne le tenseur des contraintes initiales

$E_{ijkh}$  enfin est le tenseur des coefficients d'élasticité qui peut dépendre de  $x, y, z, \dots$

La relation (1.4) qui exprime la loi de comportement dans le cas d'un problème thermoélastique avec contraintes initiales se simplifie en conséquence dans les cas plus simples.

Dans le cas élastique pur avec un matériau homogène isotrope, on a :

$$E_{ijkh} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kh} + \mu(\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk})$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé, reliés au module de Young  $E$

et au coefficient de Poisson  $\nu$  par les relations :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

et inversement :

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

$$\frac{1}{E} = \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)}$$

## 1.2. Le cas axisymétrique

Nous considérons que le domaine  $\Omega$ , les caractéristiques des matériaux et les efforts appliqués sont invariants pour toute rotation autour de l'axe  $OZ$ , ainsi le problème de l'élasticité tridimensionnelle se simplifie en un problème bidimensionnel.

Tout point  $M$  est défini par le triplet  $(x, y, z)$  dans le repère  $(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ .

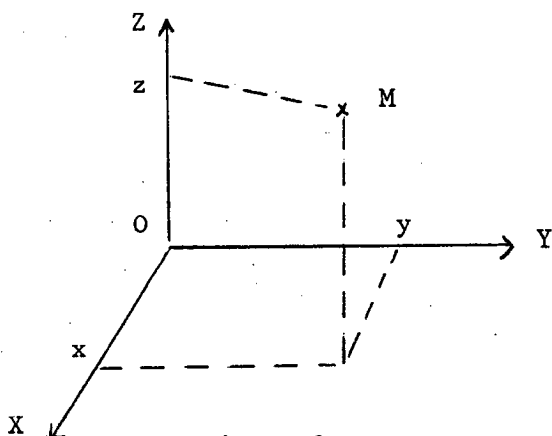
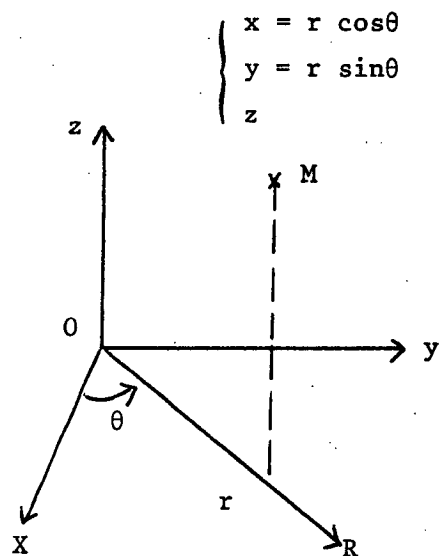


Figure 2

On définit  $r, \theta$  et  $z$  tel que :



avec  $r > 0$   
 $\theta \in ]0, \pi[$

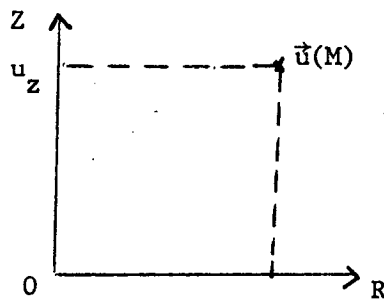
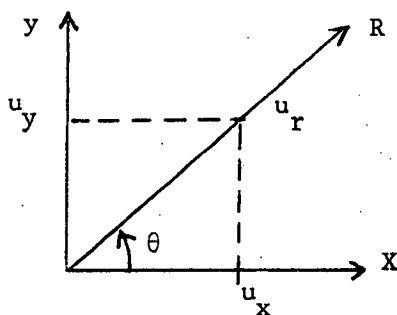
Figure 3

L'axe OR est ainsi introduit.

Les déplacements  $\vec{u}_i = (u_x, u_y, u_z)$  du point M s'expriment en fonction de  $r, \theta$  et  $z$  par :

$$(1.5) \quad \begin{cases} u_x = u_r \cos\theta \\ u_y = u_r \sin\theta \\ u_z \end{cases}$$

Nous schématisons cette expression sur les figures 4.



Figures 4



Par hypothèse, les efforts appliqués  $\vec{f}^\Omega$  et  $\vec{f}^\Gamma$  s'écrivent comme en (1.5), c'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_x^\Omega = f_r^\Omega \cos\theta \\ f_y^\Omega = f_r^\Omega \sin\theta \\ f_z^\Omega \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} f_x^\Gamma = f_r^\Gamma \cos\theta \\ f_y^\Gamma = f_r^\Gamma \sin\theta \\ f_z^\Gamma \end{array} \right.$$

Il est donc facile d'exprimer (1.1) (1.2) (1.3) avec ces nouvelles variables en remarquant que :

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r}$$

et en exprimant  $\sigma_{ij}(\vec{u})$  puis  $\sigma_{ij,j}(\vec{u})$  dans ce système.

### 1.3. Cas homogène isotrope (sans couplage ni contrainte initiale)

(1.1) (1.2) (1.3) deviennent :

$$(1.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} - \lambda \frac{\partial}{\partial r} A(u_r, u_z) - \mu \left( \Delta u_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u_r \right) = f_r^\Omega \\ \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} - \lambda \frac{\partial}{\partial z} A(u_r, u_z) - \mu \left( \Delta u_z + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) = f_z^\Omega \end{array} \right. \quad \text{dans } \Omega'$$

où

$$A(u_r, u_z) = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} u_r + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

et  $\Omega'$  est l'ouvert de  $\mathbb{R}^2$  déduit de  $\Omega$  par axisymétrie.

$$(1.7) \quad \begin{cases} \lambda A(u_r, u_z) + \mu \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} n_r + \frac{\partial u_r}{\partial z} n_z \right) = f_r^\Gamma & \text{sur } \Gamma_1' \\ \lambda A(u_r, u_z) + \mu \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} n_r + \frac{\partial u_z}{\partial z} n_z \right) = f_z^\Gamma \end{cases}$$

où  $n_r$  et  $n_z$  désignent les composantes de la normale.

$$(1.8) \quad \begin{cases} u_r = \bar{u}_r & \text{sur } \Gamma_0' \\ u_z = \bar{u}_z \end{cases}$$

de même  $\Gamma_0'$  et  $\Gamma_1'$  se déduisent de  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_1$  par axisymétrie.

#### 1.4. Cas général

La programmation prend en compte le cas général où  $E_{ijkh}$  est quelconque et où il y a couplage thermique et contraintes initiales.

## II. DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES AUX QUANTITES ELEMENTAIRES

Nous renvoyons à [1] pour la définition précise d'une formulation variationnelle de ce problème.

Rappelons simplement que si on définit le problème suivant :

$$(P') \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver, à chaque instant, les déplacements } \vec{u} = (u_r, u_z) \text{ où} \\ u_r, u_z \in V = \{v/\frac{v_r}{\sqrt{r}} \text{ et } \frac{v_z}{\sqrt{r}} \in L^2(\Omega'), Dv_r \text{ et } Dv_z \in L^2(\Omega) \\ \cap \{\vec{v}/\Gamma_1 = \bar{u}\} \\ \text{solution de :} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 & 2\pi \int_{\Omega'} \rho \, {}^t\{\vec{v}\} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\vec{u}\} r dr dz + 2\pi \int_{\Omega'} {}^t\{\varepsilon(\vec{v})\} \{\sigma(\vec{u})\} r dr dz \\
 & = 2\pi \int_{\Omega'} {}^t\{\vec{v}\} \{\vec{f}\} r dr dz + 2\pi \int_{\Gamma_1'} {}^t\{\vec{v}\} \{\vec{f}\} r d\Gamma
 \end{aligned}$$

pour tout  $v \in V$ ,

avec

$$\vec{u} = \vec{u}(r, z) = \begin{cases} u_r(r, z) \\ u_z(r, z) \end{cases} \quad \vec{u} \text{ peut aussi dépendre de } t$$

et

$$\varepsilon(\vec{v}) = \left\{ \frac{\partial v_z}{\partial z} ; \frac{\partial v_r}{\partial r} ; \frac{v_r}{r} ; \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right\}$$

$$\sigma(\vec{v}) = E_{ijkh} \varepsilon(\vec{v})$$

Alors, sous certaines conditions de régularité, la solution de (P') est solution de (P) et réciproquement.

Appliquant la méthode des éléments finis, on obtient facilement les éléments discrets correspondants :

soit  $\mathcal{T}_h$  la triangulation dont l'élément générique est noté  $T$  : la matrice de masse provient de

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\vec{u}, \vec{v}) dT,$$

la matrice de rigidité provient de :

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T {}^t\{\varepsilon_{ij}(\vec{v})\} E_{ijkh} \{\varepsilon_{kh}(\vec{u})\} dT$$

le second membre provient de :

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left\{ \int_T \{\vec{v}\} \{\vec{f}^Q\} dT + \chi_T \int_{T \cap \Gamma_I} \{\vec{v}\} \{\vec{f}^I\} d\Gamma \right\}$$

où  $\chi_T = 0$  si  $T$  n'est pas frontalier et 1 sinon.

Notre problème est donc de calculer les quantités élémentaires ainsi introduites :

- la matrice de masse élémentaire
- la matrice de rigidité élémentaire
- le second membre élémentaire

ainsi que :

- les contraintes élémentaires (en un sens que l'on précisera par la suite).

Ces calculs constituent l'objet des paragraphes suivants.

### III. POINT DE VUE ELEMENTAIRE

Le but de ce paragraphe est d'exprimer formellement sous une forme adaptée aux calculs les différentes intégrales de 2.

Nous présentons le cas du quadrangle à 4 noeuds. On définit  $\hat{F}_T$  la transformation permettant le passage de l'élément de référence  $\hat{T}$  à l'élément courant  $T$  :

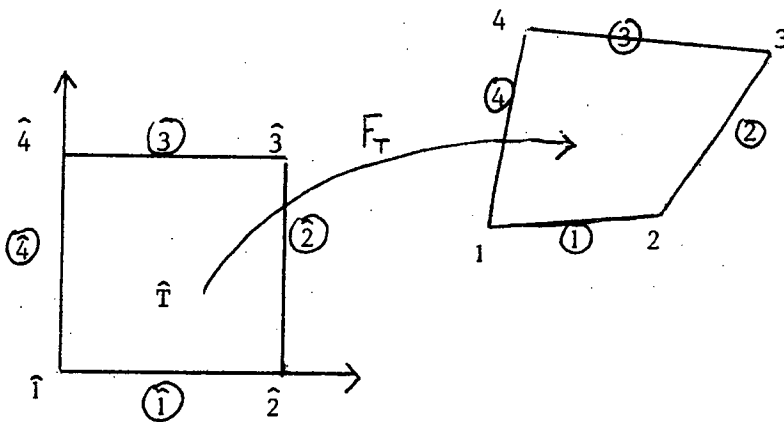


Figure 5

$\hat{F}_T$  est de la forme :

$$\hat{F}_T = \begin{Bmatrix} F_1(r,z) \\ F_2(r,z) \end{Bmatrix} .$$

$F_1$  et  $F_2$  s'expriment en fonction des 4 polynômes de base de l'élément (notés par  $p_i$ ,  $i = 1$  à 4) :

$$F_1(r,z) = \sum_{i=1}^4 r_i p_i(r,z)$$

$$F_2(r,z) = \sum_{i=1}^4 z_i p_i(r,z) .$$

Dans notre cas, on a :

$$p_1(r,z) = (1-r)(1-z)$$

$$p_2(r,z) = r(1-z)$$

$$p_3(r,z) = rz$$

$$p_4(r,z) = (1-r)z .$$

On désigne par  $[\hat{D}F]$  la quantité :

$$[\hat{D}F] = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial r} & \frac{\partial F_2}{\partial r} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{bmatrix}$$

et  $\Delta$  son jacobien :

$$\Delta = |\det(\hat{D}F)|$$

En utilisant la notation condensée :

$$[P] = \{p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4\}$$

et en introduisant :

$$[DP] = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial r} & \dots & \frac{\partial p_4}{\partial r} \\ \frac{\partial p_1}{\partial z} & \dots & \frac{\partial p_4}{\partial z} \end{bmatrix}$$

et

$${}^t\{u_T\} = {}^t\{u_1(1) \dots u_1(4), u_2(1) \dots u_2(4)\}.$$

Les déplacements élémentaires avec

$$u_i(j) = u_i(r_j, z_j)$$

le  $i$ -ème déplacement au point  $M = (r_j, z_j)$  ( $i=1$ ,  $u_1 \equiv u_r$  ;  $i=2$ ,  $u_2 \equiv u_z$ ).

On peut exprimer le tenseur élémentaire des déformations en fonction de

${}^t\{u_T\}$  :

$${}^t\{\varepsilon_T\} = {}^t\{\varepsilon_{zz} \ \varepsilon_{rr} \ \varepsilon_{\theta\theta} \ \varepsilon_{rz}\}$$

avec

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}$$

$$\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}.$$

Il est ainsi facile d'exprimer  $\{\epsilon_T\}$  en fonction de  ${}^t\{u_T\}$ . En effet si  $Du_r$  et  $Du_z$  représentent respectivement

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{Bmatrix} ,$$

on peut écrire, sous forme matricielle :

$$\{\epsilon_T\} = [\mathcal{D}] \begin{bmatrix} u_r \\ Du_r \\ Du_z \end{bmatrix}$$

où

$$[\mathcal{D}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

est la matrice des déformations.

Plus précisément :

$$\{\epsilon_T\} = [\mathcal{D}] \begin{bmatrix} P & 0 \\ DP & 0 \\ 0 & DP \end{bmatrix} \{u_T\} .$$

Ainsi  $\{\epsilon_T\}$  est exprimé en fonction des quantités élémentaires  $P$  et  $DP$  et des déplacements élémentaires.

Il reste à écrire la forme de  $\{\sigma_T\}$  à partir de ces résultats. On a :

$\{\sigma_T\} = E\{\varepsilon_T\}$  où  $E$  désigne le tenseur d'élasticité.

Rappelons que, très généralement,  $E$  est représenté par la matrice 4x4 symétrique suivante :

$$E = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 & E_4 & E_7 \\ & E_3 & E_5 & E_8 \\ & & E_6 & E_9 \\ \text{sym.} & & & E_{10} \end{bmatrix}$$

(expression se simplifiant dans le cas isotrope).

On en déduit (d'après (1.4)) :

$$\{\sigma_T\} = [E] [\mathcal{D}] \begin{bmatrix} P & 0 \\ DP & 0 \\ 0 & DP \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1T} \\ u_{2T} \end{Bmatrix}$$

(1.9)

$$- [E] \{\alpha\} [P] \{(\theta - \theta_0)_T\} + \{\sigma_T^0\}.$$

On reconnaît ici le terme classique puis le couplage thermique et enfin les contraintes initiales.

#### IV. LES TABLEAUX ELEMENTAIRES

Ces tableaux correspondent aux intégrales écrites en 2.

##### 4.1. Masse élémentaire

Sur l'élément  $T$  elle s'écrit matriciellement par :

$$\int_T {}^t \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \rho \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} dT.$$



#### 4.2. Rigidité élémentaire

Elle provient du premier terme de (1.9) et s'écrit :

$$\int_T {}^t \begin{bmatrix} P & 0 \\ DP & 0 \\ 0 & DP \end{bmatrix} {}^t [\mathcal{D}] [E] [\mathcal{D}] \begin{bmatrix} P & 0 \\ DP & 0 \\ 0 & DP \end{bmatrix} dT$$

#### 4.3. Second membre élémentaire

Il comprend 3 termes : la contribution de  $\vec{f}^\Omega$  et de  $\vec{f}^\Gamma$  (terme classique) et la contribution thermique (le second terme de (1.9) reporté au second membre) ainsi que l'incidence des contraintes initiales (le troisième terme de (1.9) reporté au second membre).

L'écriture matricielle correspondante est donc :

$$\begin{aligned} & \int_T {}^t \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \{\vec{f}^\Omega\} dT + \int_{T \cap \Gamma_1} {}^t \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \{\vec{f}^\Gamma\} dT \cap \Gamma \\ & + \int_T {}^t \begin{bmatrix} P & 0 \\ DP & 0 \\ 0 & DP \end{bmatrix} {}^t [\mathcal{D}] [E] \{\alpha\} [P] \{(\theta - \theta_0)_T\} dT \\ & - \int_T {}^t \begin{bmatrix} P & 0 \\ DP & 0 \\ 0 & DP \end{bmatrix} {}^t [\mathcal{D}] \{\sigma_T^0\} dT \end{aligned}$$

avec :

$$\{\alpha\} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

le terme de couplage thermique.

#### 4.4. Les contraintes élémentaires

Les contraintes correspondent au calcul formel suivant :

$$\{\sigma_T\}^* = \{[E] [D] \begin{bmatrix} P & 0 \\ DP & 0 \\ 0 & DP \end{bmatrix} ; -[E] \{\alpha\} [P] ; \{\sigma_T^0\} \} .$$

Les trois termes sont calculables avant même de connaître la solution  $\{u_T\}$  et seront utiles pour calculer les contraintes réelles par "remontée" avec  $\{u_T\}$  et  $\{(\theta - \theta_0)_T\}$  après résolution du problème.

Les contraintes réelles (1.9) seront calculées en certains points de l'élément  $T$  comme précisé plus loin.

#### V. INTEGRATION NUMERIQUE

Les tableaux élémentaires introduits précédemment font apparaître deux types d'intégrations : celle portant sur  $T$  et celle portant sur la frontière de  $T$ .

Etant donné une formule d'intégration numérique sur  $\hat{T}$  et une arête de  $\hat{T}$ , nous évaluerons schématiquement les termes par :

$$\int_T \dots \rightleftharpoons \int_{\hat{T}} \dots \rightleftharpoons \text{quadrature}$$

etc.

##### 5.1. Intégration numérique de surface

Le calcul à effectuer est de la forme :  $\int_T g(r,z)dT$  où  $g(.,.)$  est l'une des formes reconstruites plus haut; on passe d'abord sur l'élément de référence sur lequel on intègre numériquement :

$$\int_T g(r,z) dT = \int_{\hat{T}} \hat{g}(\hat{r}, \hat{z}) \Delta(\hat{r}, \hat{z}) d\hat{T}$$

où  $\Delta$  est le jacobien de la transformation  $\hat{F}_T$ .

$$\begin{aligned} \int_T g(r,z) dT &= \int_{\hat{T}} 2\pi \hat{g}(\hat{r}, \hat{z}) \Delta(\hat{r}, \hat{z}) r \, d\hat{r} d\hat{z} \\ &= \int_{\hat{T}} 2\pi \hat{g}(\hat{r}, \hat{z}) \Delta(\hat{r}, \hat{z}) F_1(\hat{r}) d\hat{r} d\hat{z} \\ &\approx \sum_{\ell=1}^{npi} 2\pi \hat{g}(\hat{b}_\ell) \Delta(\hat{b}_\ell) F_1(\hat{b}_\ell) \omega_\ell \end{aligned}$$

La quadrature est définie par les  $npi$  poids  $\omega_\ell$  et points  $\hat{b}_\ell = (\hat{r}_\ell, \hat{z}_\ell)$  ( $F_1(.)$  est la première composante de  $\hat{F}_T$ ).

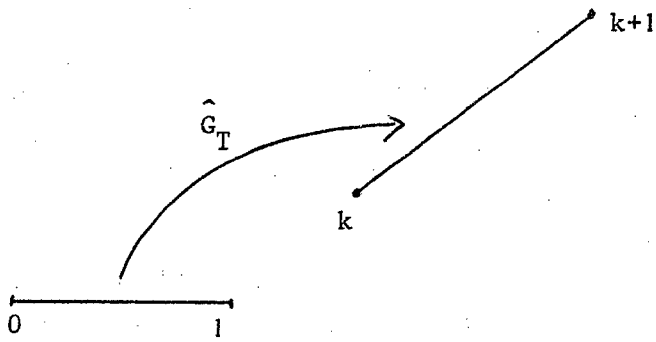
## 5.2. Intégration de bord

De la même façon, pour calculer  $\int_{T \cap \Gamma_1} g(r,z) dT$ , on passe sur l'élément de référence (arête  $]0,1[$ ) sur lequel on intègre numériquement :

$$\int_{T \cap \Gamma_1} g(r,z) dT = \int_{\hat{T} \cap \hat{\Gamma}} \hat{g}(\hat{r}, \hat{z}) \delta_k(\hat{r}, \hat{z}) d\hat{T}$$

où  $\delta_k(\hat{r}, \hat{z})$  désigne la longueur de l'arête considérée.

Si  $\hat{G}_T = \{G_1, G_2\}$  est la transformation permettant l'envoi de l'arête de référence  $]0,1[$  sur l'arête  $k$  de l'élément courante traitée, on a :



$r_k, z_k, r_{k+1}, z_{k+1}$  désignent les coordonnées des extrémités de l'arête  $k$  de l'élément  $T$ .

Figure 6

La longueur de l'arête  $k$  s'exprime par :

$$\delta_k = \sqrt{dG_1^2 + dG_2^2}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_{T \cap \Gamma_1} g(r, z) dT \cap \Gamma_1 &= \int_{\hat{T} \cap \Gamma} 2\pi \hat{g}(\hat{\sigma}) \delta_k(\hat{\sigma}) r d\hat{\sigma} \\ &= \int_{\hat{T} \cap \Gamma} 2\pi \hat{g}(\hat{\sigma}) \delta_k(\hat{\sigma}) G_1(\hat{\sigma}) d\hat{\sigma} \\ &\approx \sum_{\ell=1}^{npia} 2\pi \hat{g}(\hat{b}_\ell) \delta_k(\hat{b}_\ell) G_1(\hat{b}_\ell) \end{aligned}$$

où  $d\hat{\sigma}$  désigne l'élément d'intégration sur  $]0,1[$ ,  $\hat{\sigma}$  la variable courante et la quadrature a pour paramètre  $npia, \omega_\ell, b_\ell$ .

### 5.2.1. Intégration de degré 1

Pour les éléments quadrangulaires et triangulaires de degré 1, on a :

$$G_T = \begin{Bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} G_1(\hat{\sigma}) = r_k(1 - \hat{\sigma}) + r_{k+1} \hat{\sigma} \\ G_2(\hat{\sigma}) = z_k(1 - \hat{\sigma}) + z_{k+1} \hat{\sigma} \end{cases}$$

et

$$dG_1 = -r_k + r_{k+1}$$

$$dG_2 = -z_k + z_{k+1}$$

Ainsi

$$\delta_k(\hat{\sigma}) = \sqrt{(r_{k+1} - r_k)^2 + (z_{k+1} - z_k)^2}$$

et ne dépend pas de  $\hat{\sigma}$  :

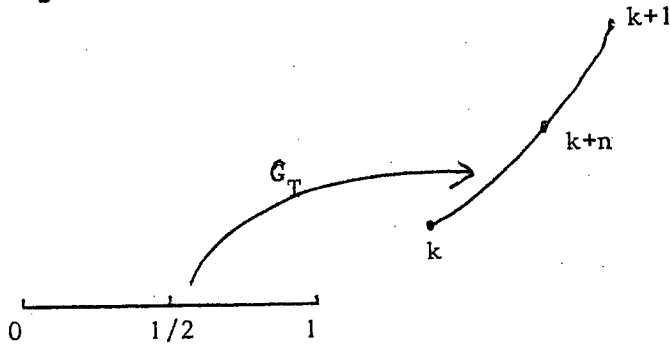
$$\int_{Tn\Gamma_1} g(r,z) dTn\Gamma_1 \approx \sum_{\ell=1}^{npia} 2\pi \hat{g}(\hat{\sigma}_\ell) \delta_k G_1(\hat{\sigma}_\ell) \omega_\ell$$

### 5.2.2. Interpolation de degré 2

Pour les éléments correspondants, on a :

$$G_1(\hat{\sigma}) = (1-\hat{\sigma})(1-2\hat{\sigma})r_k + \hat{\sigma}(2\hat{\sigma}-1)r_{k+1} + 4\hat{\sigma}(1-\hat{\sigma})r_{k+n}$$

et  $G_2(\hat{\sigma})$  a la même forme en remplaçant  $r$  par  $z$ .



L'arête  $k$  considérée a pour sommet  $(r_k, z_k)$  et  $(r_{k+1}, z_{k+1})$ , son milieu est  $(r_{k+n}, z_{k+n})$  où  $n=4$  (triangle P2) ou  $n=5$  (quadrangle Q2).

Dans ce cas :

$$\delta_k(\hat{\sigma}) = \sqrt{dG_1^2 + dG_2^2} \text{ avec}$$

$$dG_1 = (4\hat{\sigma}-3)r_k + (4\hat{\sigma}-1)r_{k+1} + (4-8\hat{\sigma})r_{k+n}$$

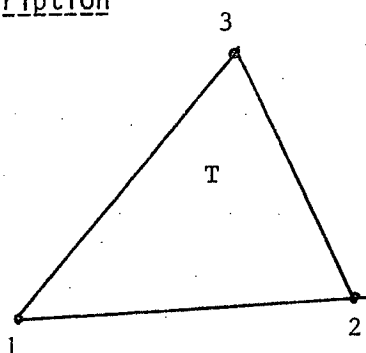
idem pour  $dG_2$  avec  $z$  remplaçant  $r$ .

Ainsi  $\delta_k(\hat{\sigma})$  dépend effectivement de  $\hat{\sigma}$  et

$$\int_{T\cap\Gamma_1} g(r,z)dT\cap\Gamma_1 \approx \sum_{\ell=1}^{npia} 2\pi \hat{g}(\hat{b}_\ell) \delta_K(\hat{b}_\ell) G_1(\hat{b}_\ell) \omega_\ell$$

## VI. DESCRIPTION DES 4 ELEMENTS

## 6.1. Le triangle à 3 noeuds

Description

Interpolation P1 pour le déplacement radial et le déplacement axial.

3 noeuds : les 3 sommets.

Les 3 polynômes de base [P] sont consignés dans le tableau suivant :

i	$P_i$
1	$1-r-z$
2	$r$
3	$z$

Tableau 1

Remarque : sur le bord, [P] se réduit à  $\{1-\sigma;\sigma\}$

Intégration de bord

Formule de Gauss à 2 points :

$$npia = 2 \quad ; \quad \omega_1 = \omega_2 = 1/2$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad ; \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} .$$



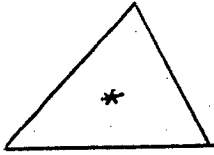
Remarque : cf. 5.2.1 pour  $G_T$  et  $\delta_k$  .

### Intégration de surface

Il est fondamental de choisir une formule dont les points d'intégration soient internes.

Nous prenons

$$n_{pi} = 1 \quad ; \quad \omega_1 = \frac{1}{2} \quad ; \quad \hat{b}_1 = \{1/3, 1/3\}$$



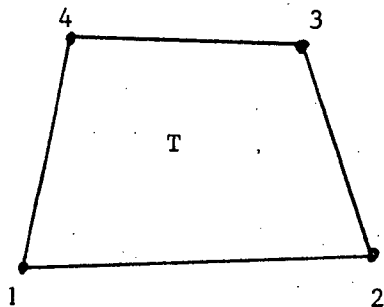
### Point de calcul des contraintes

Le barycentre de chaque élément.



## 6.2. Le quadrangle à 4 noeuds

### Description



Interpolation  $Q_1$  pour le déplacement radial et le déplacement axial.

4 noeuds : les 4 sommets.

Les 4 polynômes de base  $[P]$  sont :

i	$p_i$
1	$(1-r)(1-z)$
2	$r(1-z)$
3	$rz$
4	$(1-r)z$

Tableau 2

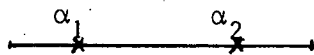
Remarque : sur le bord,  $[P]$  se réduit à  $\{1-\sigma;\sigma\}$

### Intégration de bord

Formule de Gauss à 2 points :

$$npia = 2 \quad ; \quad \omega_1 = \omega_2 = 1/2$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad ; \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

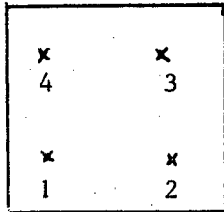


Remarque : cf. 5.2.1 pour  $G_T$  et  $\delta_k$ .

Intégration de surface

Formule de Gauss à 4 points :

$$n_{pi} = 4 \quad ; \quad \omega_{\ell} = 1/4 \quad (\ell = 1, 4)$$



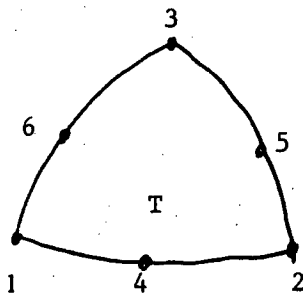
$$\hat{b}_{\ell} = ((\alpha_1, \alpha_1); (\alpha_2, \alpha_1); (\alpha_2, \alpha_2); (\alpha_1, \alpha_2))$$

Points de calcul des contraintes

Les 4 points de Gauss précédents.

### 6.3. Le triangle à 6 noeuds

#### Description



Interpolation P2 pour le déplacement radial et le déplacement axial.

6 noeuds : les 3 sommets et les 3 milieux des arêtes.

Les 6 polynômes de base [P] sont :

i	$P_i$
1	$(1-r-z)(1-2r-2z)$
2	$r(2r-1)$
3	$z(2z-1)$
4	$4r(1-r-z)$
5	$4rz$
6	$4z(1-r-z)$

Tableau 3

Remarque : sur le bord, [P] se réduit à  $\{(1-\sigma)(1-2\sigma); \sigma(2\sigma-1); 4\sigma(1-\sigma)\}$

#### Intégration de bord

Formule de Gauss à 3 points.

$$npia = 3 \quad ; \quad \omega_1 = 5/18 = 0,2777\dots$$

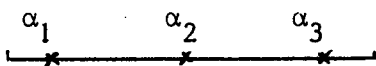
$$\omega_2 = 8/18 = 0,444\dots$$

$$\omega_3 = 5/18$$

$$\alpha_1 = \frac{1-\sqrt{3/5}}{2} = 0,1127016$$

$$\alpha_2 = 1/2$$

$$\alpha_3 = \frac{1+\sqrt{3/5}}{2} = 0,887298$$



Remarque : cf. 5.2.2 pour  $G_T$  et  $\delta_k$ .

# Intégration de surface

Formule à 7 points

$$n_{pi} = 7 \quad ; \quad \omega_I = 9/80 = 0,1125$$

$$\omega_{II} = \frac{155 - \sqrt{15}}{2400} = 0,06296959$$

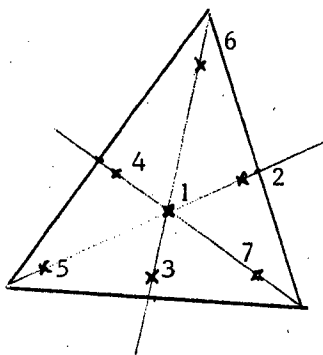
$$\omega_{III} = \frac{155 + \sqrt{15}}{2400} = 0,06619707$$

$$\alpha_1 = \frac{6 - \sqrt{15}}{21} = 0,101287$$

$$\alpha_2 = \frac{6 + \sqrt{15}}{21} = 0,470142$$

$$\alpha_3 = \frac{9 - 2\sqrt{15}}{21} = 0,05971587$$

$$\alpha_4 = \frac{9 + 2\sqrt{15}}{21} = 0,797427$$



$$\omega_1 = \omega_I$$

$$\omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega_{III}$$

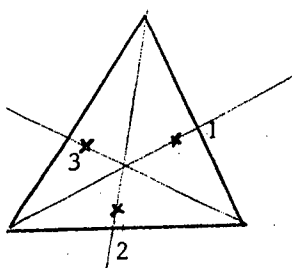
$$\omega_5 = \omega_6 = \omega_7 = \omega_{II}$$

## Tableau des points d'intégration

$\ell$	$b_\ell$	
1	1/3	1/3
2	$\alpha_2$	$\alpha_2$
3	$\alpha_2$	$\alpha_3$
4	$\alpha_3$	$\alpha_2$
5	$\alpha_1$	$\alpha_1$
6	$\alpha_1$	$\alpha_4$
7	$\alpha_4$	$\alpha_1$

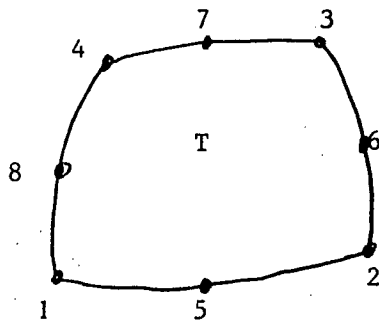
## Les points de calcul des contraintes

Ce sont les 3 points suivants :



$$(\alpha_2, \alpha_2); (\alpha_2, \alpha_3); (\alpha_3, \alpha_2)$$

## 6.4. Le quadrangle à 8 noeuds

Description

Interpolation  $Q_2'$  pour le déplacement radial et le déplacement axial.

8 noeuds : les 4 sommets et les 4 milieux des arêtes.

Les 8 polynômes de base  $[P]$  sont :

i	$p(i)$
1	$(1-r)(1-z)(1-2r-2z)$
2	$r(1-z)(2r-2z-1)$
3	$-rz(3-2r-2z)$
4	$(1-r)z(-2r+2z-1)$
5	$4r(1-r)(1-z)$
6	$4r(1-z)z$
7	$4r(1-r)z$
8	$4(1-r)(1-z)z$

Tableau 4

Remarque : sur le bord,  $[P]$  se réduit à :

$$\{(1-\sigma)(1-2\sigma); \sigma(2\sigma-1); 4\sigma(1-\sigma)\}$$

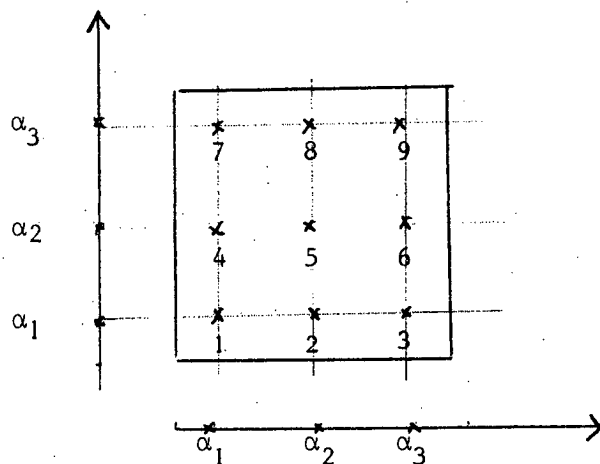
Intégration de bord

Formule de Gauss à 3 points. Cf. 6.3.

Remarque : cf. 5.2.2 pour  $G_T$  et  $\delta_k$ .

Intégration de surface

Formule de Gauss à 9 points.



$$\text{Soient } \alpha_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{\frac{3}{5}})$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{\frac{3}{5}})$$

$$\omega_1 = 5/18$$

$$\omega_2 = 8/18$$

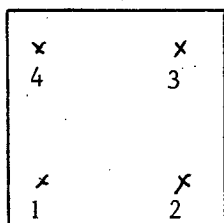
$$\omega_3 = \omega_1$$

De  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  on déduit les 9 points d'intégration (cf. figure).  
Des poids  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  on déduit les 9 poids par la formule :

$$\omega_{ij} = \omega_i \omega_j$$

Points de calcul des contraintes

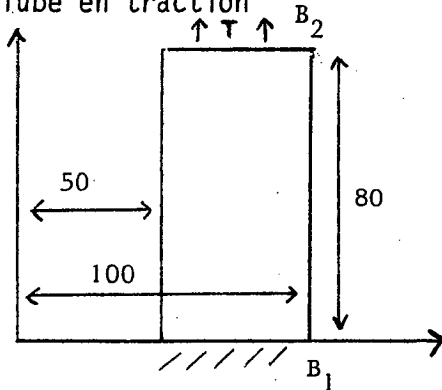
Ce sont les 4 points suivants : les points 1, 3, 7 et 9 de Gauss.



## VII. PROBLEMES MODELES

Afin de valider ces 4 éléments, nous allons calculer les déplacements et les contraintes pour les trois problèmes-test suivants :

## 7.1. Tube en traction



Base  $B_1$  bloquée en  $z$

$r_i$  et  $r_e$  les rayons intérieurs et extérieurs

$T$  la traction (en  $z$ )

Les résultats théoriques sont les suivants :

$$u_r = -\frac{Tvr}{E} ; \quad u_z = \frac{Tz}{E}$$

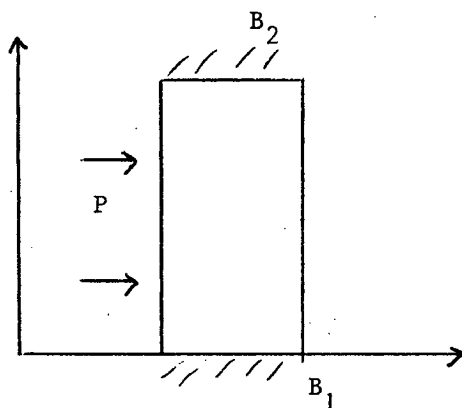
$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rz} = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_{zz} = T.$$

On prendra :  $E = 21000$

$\nu = .3$

$T = 3$ .

## 7.2. Tube sous pression intérieure



Bases  $B_1$  et  $B_2$  bloquées en  $z$

$P$  la pression sur la face interne.

Les résultats théoriques sont les suivants :

$$u_r = \frac{P}{E} \frac{(1+\nu)}{(K^2-1)} \left[ (1-2\nu)r + \frac{r_e^2}{r} \right]$$

$$u_z = 0$$

avec

$$K = \frac{r_e}{r_i}$$

$$\sigma_{rr} = P \left( \frac{1 - \left(\frac{r_e}{r}\right)^2}{K^2 - 1} \right)$$

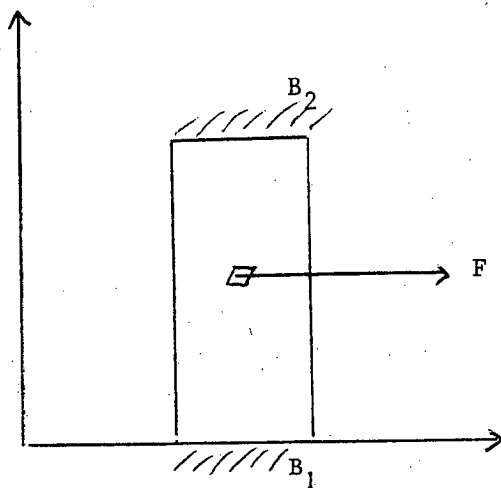
$$\sigma_{\theta\theta} = P \left( \frac{1 + \left(\frac{r_e}{r}\right)^2}{K^2 - 1} \right)$$

$$\sigma_{rz} = 0$$

$$\sigma_{zz} = \frac{2\nu P}{K^2 - 1}$$

Les mêmes valeurs numériques sont prises avec  $P = +5$ .

### 7.3. Tube sous force volumique radiale



Bases  $B_1$  et  $B_2$  bloquées en  $z$   
 $F$  la force volumique radiale .



Les résultats théoriques sont les suivants :

$$u_r = \frac{F}{3E} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \left[ (2-\nu) \alpha r + \frac{2-\nu}{1-2\nu} \beta \frac{1}{r} - r^2 \right]$$

avec

$$\alpha = \frac{r_e^2 + r_i r_e + r_i^2}{r_i + r_e}$$

et

$$\beta = \frac{r_i^2 r_e^2}{r_i + r_e}$$

$$u_z = 0$$

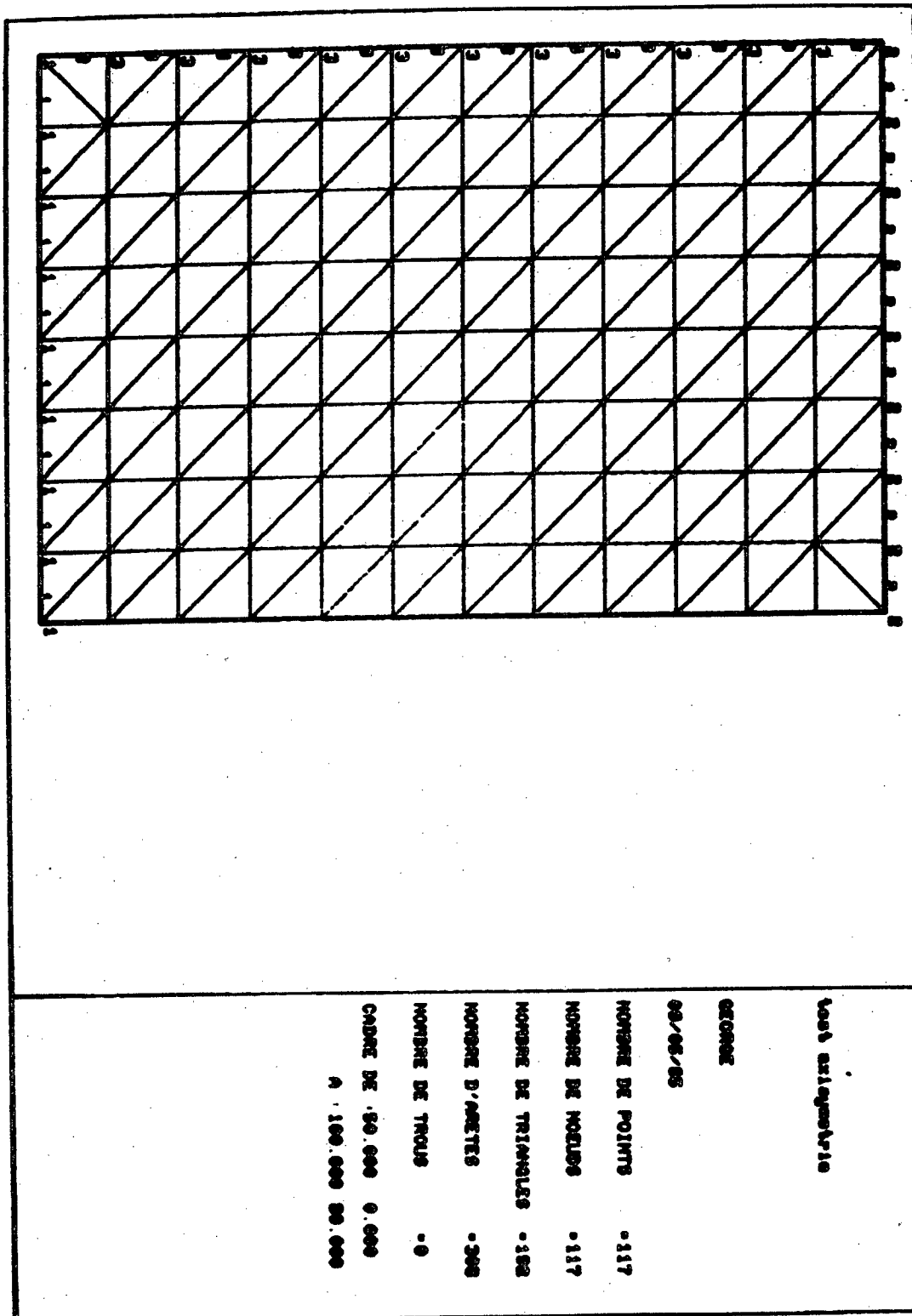
$$\sigma_{rr} = \frac{F}{3} \left\{ \frac{2-\nu}{1-\nu} \left[ \alpha - \frac{\beta}{r^2} \right] - r \right\}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{F}{3} \left\{ \frac{2-\nu}{1-\nu} \left[ \alpha + \frac{\beta}{r^2} \right] - \frac{1+\nu}{1-\nu} r \right\}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{F}{3} \frac{\nu}{1-\nu} [2(2-\nu)\alpha - 3r]$$

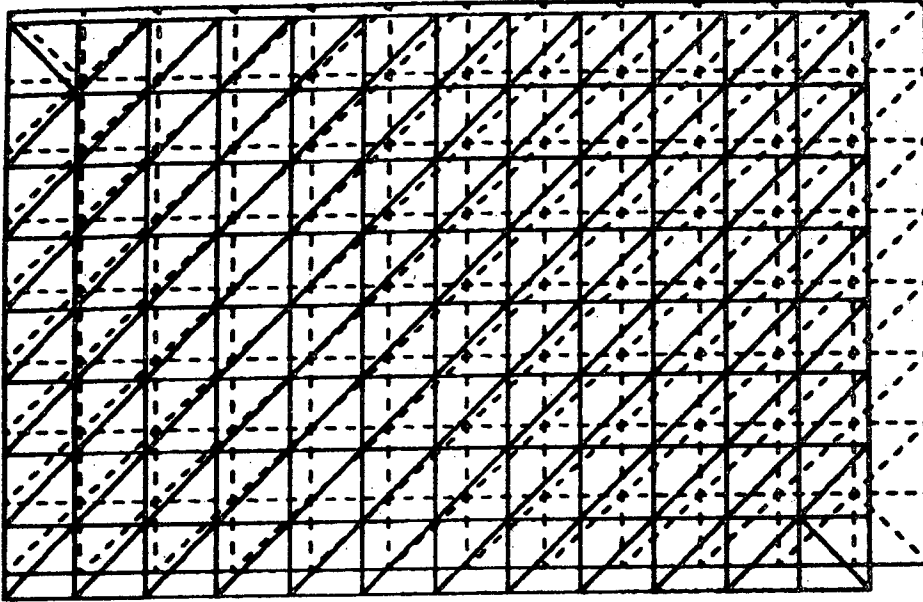
$$\sigma_{rz} = 0 .$$

Les mêmes valeurs numériques sont prises avec  $F = 6$  .

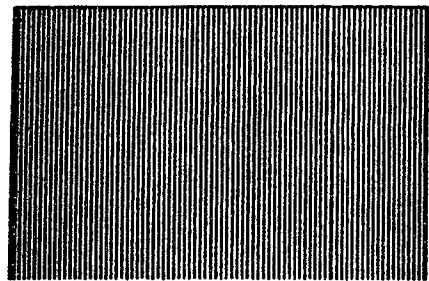


Maillage en triangles ( Interpolation P1 ) : 192 éléments , 117 noeuds

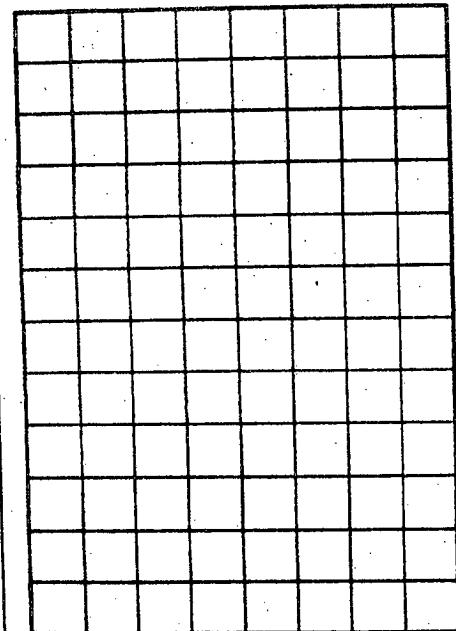
Tube en traction : interpolation P1 , le maillage et sa déformée ( rapport : 500 )



Tube en traction : les contraintes  
Critère de Tresca



min 0.000000 max 0.000000  
Tresca critère : 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000



test triangulaire

GEOMET

00/00/00

NOMBRE DE POINTS -117

NOMBRE DE NOEUDS -117

NOMBRE DE QUADRANGLES-00

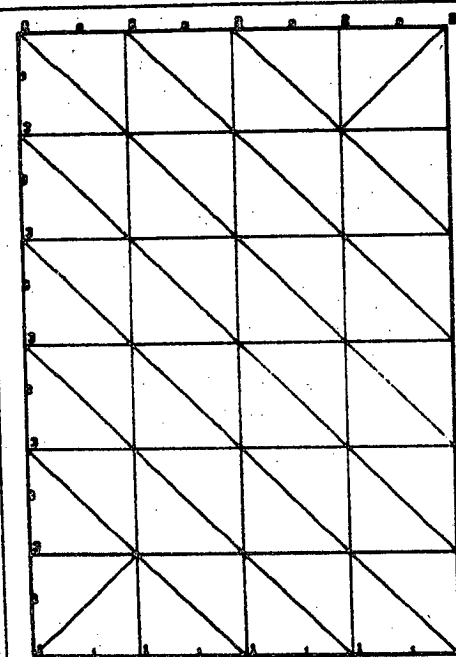
NOMBRE D'ARÊTES -818

NOMBRE DE TROUS -0

CADRE DE -50.000 0.000

A -100.000 00.000

Maillage en  
quadrangles  
( Interpolation Q1 )  
96 éléments  
117 noeuds



test triangulaire

GEOMET

00/00/00

NOMBRE DE POINTS -35

NOMBRE DE NOEUDS -117

NOMBRE DE TRIANGLES -48

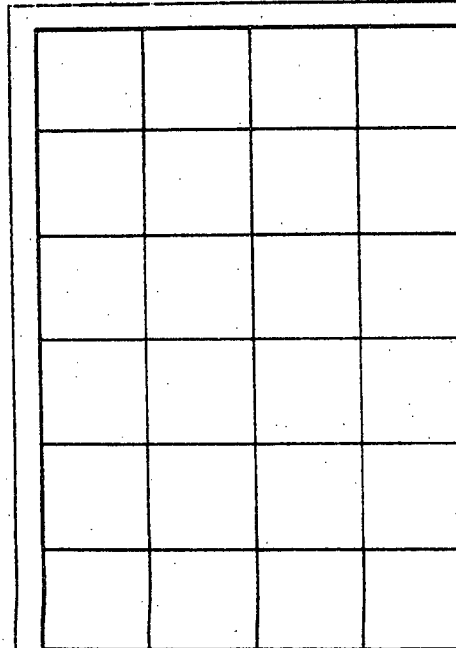
NOMBRE D'ARÊTES -82

NOMBRE DE TROUS -0

CADRE DE -50.000 0.000

A -100.000 00.000

Maillage en  
triangles  
( Interpolation P2 )  
48 éléments  
117 noeuds



test triangulaire

GEOMET

00/00/00

NOMBRE DE POINTS -35

NOMBRE DE NOEUDS -93

NOMBRE DE QUADRANGLES-04

NOMBRE D'ARÊTES -80

NOMBRE DE TROUS -0

CADRE DE -50.000 0.000

A -100.000 00.000

Maillage en  
quadrangles  
( Interpolation Q'2 )  
24 éléments  
93 noeuds

## Tube sous pression intérieure

P1 :	0.27E-03	0.11E-03
Q1 :	0.43E-03	0.39E-10
P2 :	0.37E-04	0.10E-04
Q2 :	0.88E-05	0.11E-10

Les déplacements ( comparaison )

## Tube en traction

P1 :	0.10E-09	0.19E-09
Q1 :	0.10E-09	0.19E-09
P2 :	0.72E-09	0.12E-08
Q2 :	0.90E-09	0.14E-08

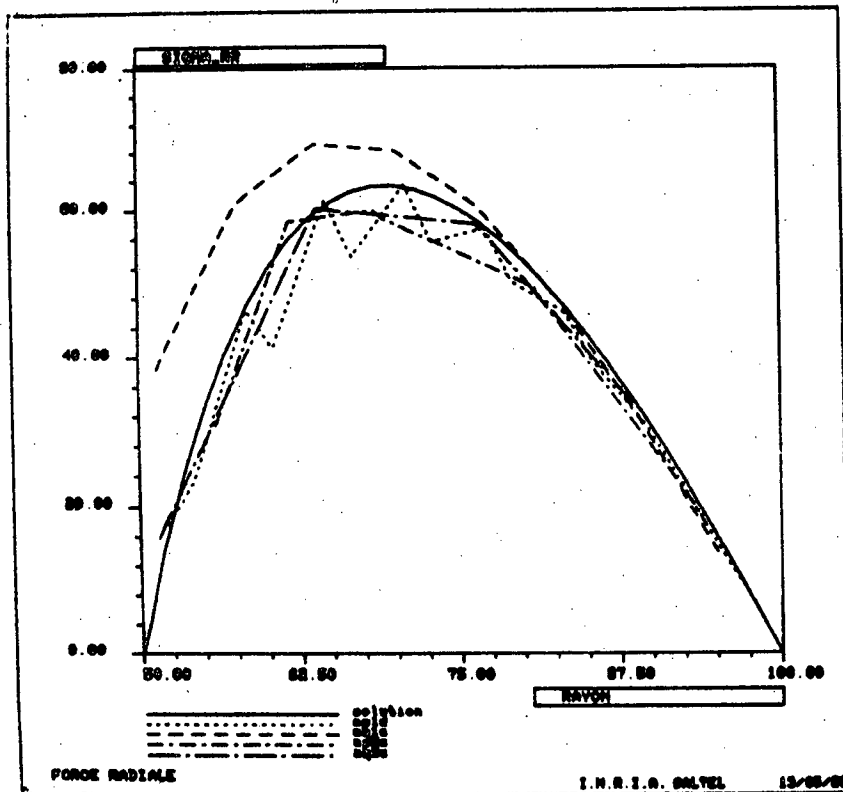
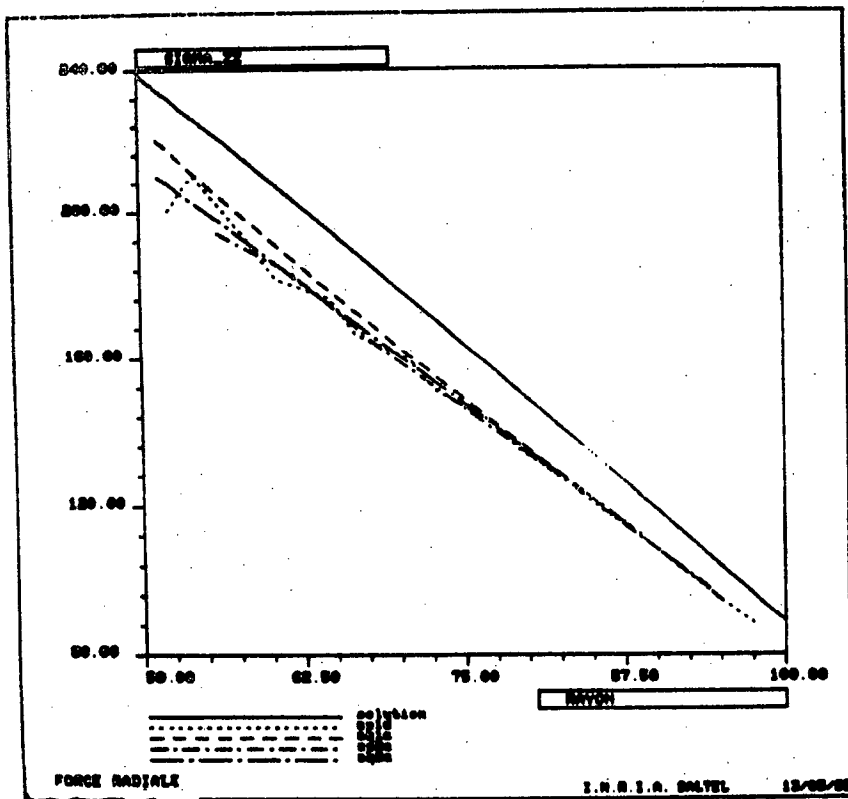
## Tube sous force radiale

P1 :	0.14E-01	0.63E-02
Q1 :	0.12E-01	0.12E-08
P2 :	0.18E-02	0.51E-03
Q2 :	0.43E-03	0.35E-09
	d.l. 1	d.l. 2

Comparaison des erreurs absolues ( en norme L2 ) pour les 2 degrés de liberté et pour les 3 cas test .

## Remarques :

- i) les 4 éléments peuvent être classés dans l'ordre suivant :  
TRIANGLE P1   QUADRANGLE Q1   TRIANGLE P2   QUADRANGLE Q2
- ii) la géométrie du domaine étant quadrangulaire , les résultats des quadrangles sont meilleurs que ceux des triangles
- iii) la solution exacte pour le d.l. 2 est nulle , tandis que celle du d.l. 1 est significative : ceci peut se remarquer sur les erreurs obtenues .



```

      SURROUTINE ESAP1X(NBPOLY,NPI,POIDS,P13,DP13,NOTELF,NOTELF,
      & SURFAM,NOPTIO,TETA,SURFAC,SIGN,ARETEF,
      & R,Z,NDSDE,NOREF,NDSM,RE)
C *****
C BUT : CALCUL DES SECONDS MEMBRES DE L'ELEMENT TRIA AP10
C --- TRIANGLE P1 AXISYMETRIQUE THERMO-ELASTIQUE
C VOIR ESAP10
C *****
C PROGRAMMEUR : PL. GEORGE INRIA T984
C *****
      DOUBLE PRECISION SURFAM(*),ALF,TETA(NDSM,*),P13(*),DP13(*),
      & RE(NDSM,*),SURFAC(NDSM,2,*),ARETEF(NDSM,2,*),
      & D1,RR,F1,F2,DFM1,POIDEL,D2PI,POIDSA(2),XA(2),
      & A,G1,G2,G4,DP,ELAS,D,POIDS(*),RD,ZD,AUX1,
      & SIGO(NDSM,4,*)
      DIMENSION NOTELF(*),NOTELF(*),NOREF(*),R(*),Z(*)
      COMMON/THELAO/INDICV,INDICS,INDICA,INDICP,D2PI,
      & IP(6),F1(4),F2(4),DFM1(4,4),DP(2,3,3),ELAS(10),
      & POIDEL(3),A(4),G1(6),G2(6),G4(5,3),VXZ(834)
      DATA NP1A,POIDSA,XA/2, 0.500,0.500,
      & 0.21132485540400,0.78867513450307/

C
C      CALCUL DE F1,F2,DFM1,DP
C -----
C      IF(INDICS) 2,1,2
1 CALL ETAP10(NBPOLY,NPI,POIDS,P13,DP13,R,Z)
C
C      INITIALISATION DE BF
C
2 CALL AZER00(NDSM,6,1,RE)
C
C      CONTRIBUTION DES EFFORTS SURFACIQUES
C -----
C
      IF ( NOTELF(1) .NE. 20 ) GO TO 6
      DO 5 L=1,NPI
      RD = F1(L)
      ZD = F2(L)
      N = 0
      NCOMP = 2
      LONG = NDSM + NCOMP
      CALL SPEF00(NDSDE,RD,ZD,N,LONG,NCOMP,SURFAC(1,1,L))
5 CONTINUE
6 CONTINUE
C
      DO 10 I=1,NBPOLY
      DO 9 J=1,2
      I1 = IP(I + NBPOLY * (J-1))
      DO 8 N=1,NDSM
      D1 = 0.00
      DO 7 L = 1,NPI
      D1 = D1 + POIDEL(L) * P13(I,L) * SURFAC(N,J,L)
7 CONTINUE
      BF(N,I1) = RE(N,I1) + D1
8 CONTINUE
9 CONTINUE
10 CONTINUE
C
C      CONTRIBUTIONS DES EFFORTS SUR LES ARETES
C -----
C
      DO 16 K=1,3
      IF ( NOREF(K) ) 11,16,11
11 K1=K+1
      IF(K1.EQ.4) K1=1
      D = R(K1)-R(K)
      D1 = Z(K1)-Z(K)
      D1 = D2PI*DSQRT(D*D+D1*D1)
      IF ( NOTELF(1) .NE. 20 ) GO TO 12
      DO 121 L=1,NP1A
      RR = R(K) * (1-XA(L)) + R(K1) * XA(L)
      L1 = L+NP1A*(K-1)
      NOSD = NOPEFF(K)
      RD = RD
      ZD = Z(K) * (1-XA(L)) + Z(K1) * XA(L)
      NCOMP = 2
      N = 0
      LONG = NDSM + NCOMP
      CALL SPEF00(NOSD,RD,ZD,N,LONG,NCOMP,ARETEF(1,1,L1))
121 CONTINUE
12 CONTINUE
      DO 15 L=1,NP1A
      RR = R(K) * (1-XA(L)) + R(K1) * XA(L)
      L1 = L+NP1A*(K-1)
      DO 14 J=1,2
      I1=IP(K+(J-1)*NBPOLY)
      I1=IP(K1+(J-1)*NBPOLY)
      DO 13 N=1,NDSM
      D = RR + D1 * POIDSA(L) * APTEF(N,J,L1)
      RE(N,I1) = RE(N,I1) + D*(1-XA(L))
      BF(N,I1) = BF(N,I1) + D*XA(L)
13 CONTINUE
14 CONTINUE
15 CONTINUE
16 CONTINUE
C
C      CONTRIBUTIONS DES CONTRAINTES INITIALES
C -----
C
      IF ( NOPTIO .EQ. 0 ) RETURN
      IF ( NOPTIO .EQ. 2 ) GO TO 22
      IF ( NOTELF(1) .NE. 20 ) GO TO 18
      DO 17 L=1,NPI
      RD = F1(L)
      ZD = F2(L)
      N = 0

```

Le sous-programme ESAP1X : calcul du  
second membre élémentaire

( Bibliothèque MODULEF : ELA2 )

```

      NCOMP = 4
      LONG = NDSM * NCOMP
      CALL SPSIGW(NDSDE, RD, ZD, N, LONG, NCOMP, SIGD(1,1,L))
17 CONTINUE
C
18 CONTINUE
  DO 21 L=1,NPI
    D1 = POIDEL(L)
    D = D1 / F1(L)
    DO 20 N=1,NDSM
      A(1) = SIGD(N,3,L) * D
      A(2) = SIGD(N,2,L) * D1
      A(3) = SIGD(N,4,L) * D1
      A(4) = SIGD(N,1,L) * D1
C
      TP = A(1) + TDP + A(2 ET 3) => G1(1,6)
C
      CALL TABDD(NBPOLY,1,1,P13(1,L),A(1),G1)
      CALL TABDD(NBPOLY,2,1,DP(1,L),A(2),G1)
C
      TDP = A(3 ET 4)
C
      CALL TABDD(NBPOLY,2,1,DP(1,L),A(3),G1(4))
      DO 19 I=1,6
        J = IP(I)
        RE(N,J) = RE(N,J) - G1(I)
19 CONTINUE
20 CONTINUE
C
21 CONTINUE
C
      CONTRIBUTIONS DES CONTRAINTES THERMIQUES
      -----
      CALCUL DANS TOUS LES CAS DE LA MATRICE D ELASTICITE E(17)
C
22 CONTINUE
  IF ( NOPTIO .EQ. 4 ) RETURN
  IF ( INDICA .NE. 0 ) GO TO 25
C
  APPEL DU SP SPELAS MODIFIANT SURFAM
C
  IF ( IABS( NOTELM(1) ) .NE. 20 ) GO TO 24
  N = 0
  RD = F1(1)
  ZD = F2(1)
  NCOMP = 1
  LONG = 2
  IF ( NOTELM(1) .EQ. - 20 ) LONG = 10
  CALL SPELAS(NDSDE, RD, ZD, N, LONG, NCOMP, SURFAM(1))
C
24 CALL E72AXY(NOTELM(1), SURFAM, ELAS)
  INDICA = 1
C
25 CONTINUE
  IF(INDICP .NE. 0) GO TO 27
  ALF = SURFAM(11)
  IF ( IABS( NOTELM(1) ) .NE. 20 ) GO TO 27
  RD = F1(1)
  ZD = F2(1)
  N = 0
  LONG = 1
  CALL SPDILA(NDSDE, RD, ZD, N, LONG, LONG, ALF)
27 CONTINUE
  INDICP = 1
C
29 CONTINUE
  A(1) = ALF*ELAS(4) + ALF*ELAS(5) + ALF*ELAS(6)
  A(2) = ALF*ELAS(7) + ALF*ELAS(8) + ALF*ELAS(9)
  A(3) = ALF*ELAS(7) + ALF*ELAS(8) + ALF*ELAS(9)
  A(4) = ALF*ELAS(1) + ALF*ELAS(2) + ALF*ELAS(4)
C
30 CALL AZEROD(4,6,1,G4)
C
  DO 32 L=1,NPI
    D = POIDEL(L)
    DO 31 I=2,4
      G1(I) = D * A(I)
31 CONTINUE
    D = D/F1(L)
    G1(1) = D * A(1)
C
    TP = G1(1) + TDP + (G1(2),G1(3))
C
    CALL TABDD(NBPOLY,1,1,P13(1,L),G1(1),G2)
    CALL TABDD(NBPOLY,2,1,DP(1,L),G1(2),G2)
C
    TDP = (G1(2),G1(4))
C
    CALL TABDD(NBPOLY,2,1,DP(1,L),G1(3),G2(4))
    G2 = P
    CALL AR1D(6,1,NBPOLY,G2,P13(1,L),G4)
32 CONTINUE
C
  TETA * G4 => RE = RE + G4(TP)
C
  DO 35 I=1,6
    L = IP(I)
    DO 34 N=1,NDSM
      D = 0.00
      DO 33 J=1,NBPOLY
        D = D + TETA(N,J) * G4(I,J)
33 CONTINUE
      BF(N,L) = RE(N,L) + D
34 CONTINUE
35 CONTINUE
  END

```



## VIII. IMPLEMENTATION DANS LA BIBLIOTHEQUE MODULEF

## 8.1. Récapitulation

Triangle à 3 noeuds	Quadrangle à 4 noeuds	Triangle à 6 noeuds	Quadrangle à 8 noeuds
TRIA AP1D	QUAD AQ1C	TRIA AP2C	QUAD AQ 2C
POBA 2P13	POBA 2Q13	POBA 2P26	POBA 2Q25
Barycentre	4 points de Gauss	7 points	9 points de Gauss
2 points de Gauss	2 points de Gauss	3 points de Gauss	3 points de Gauss
Barycentre	4 points de Gauss	3 points	4 points

Tableau récapitulatif

Dans ce tableau nous avons mentionné, pour chaque élément :

- le nom de l'élément
- le nom du tableau du fichier POBA contenant les valeurs utiles (polynômes de base aux points d'intégration numérique...) cf. [14] et [95]
- les points de la formule d'intégration de surface
- les points de la formule d'intégration de bord
- les points de calcul des contraintes.

## 8.2. Utilisation de ces éléments

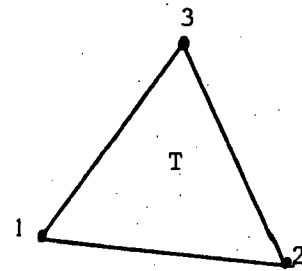
La documentation [14] décrit en détails la manière d'appeler ces éléments pour calculer les tableaux élémentaires (masse, rigidité, second membre, contrainte).

Résumons ici les points principaux :

- i - les tableaux élémentaires sont calculés par le module THELAS ou ELASCT.
- ii - pour ELASCT, les données ( $\rho, E, f^{\Omega}, f^{\Gamma}, \dots$ ) sont constantes par élément et sont des arguments du module
- iii - pour THELAS, les données peuvent être fournies de différentes manières :
  - . par tableau(x)
  - . par sous-programme (FORCE et MILIEU)
  - . par sous-programme utilisateur (SPROTC, ..., SPEFOO, ...).

La description de la manière dont on fournira les données est contenue dans les S.D MILI et FORC que l'on créera en exécutant les modules COMILI et COFORC. Lors de l'exécution du module THELAS on fournira donc le(s) tableau(x) et le(s) sous-programme(s) selon ces spécifications.

Pour savoir exactement quelles sont les données (nombres et nature) on se reportera aux fiches techniques de chaque élément (cf. ci-après).



**ELASTICITE** AXISYMETRIQUE

**ELAS TRIA AP1D** : TRIANGLE à 3 noeuds  
( *PL GEORGE* ) thermoélastique

Espace  $R^2$

Inconnues : déplacement radial et axial :  $u_r$  et  $u_z$

Code : 200039

Code géométrique : 3

Interpolation : **P1** Lagrange pour les deux déplacements

Un type de noeud : les 3 sommets

2 degrés de liberté par noeud : la valeur des  
déplacements ( mnémonique 'VN' )

Element de référence : le triangle unité

Points et noeuds coïncident partout

Les points sont définis par leur coordonnées

Pas de tableau associé

Blocage : déplacement ( radial et/ou axial ) = valeur SD BDCL

Le fichier **POBA** est nécessaire ( tableau **2P13** )

**DONNEES** : ( en double précision )

Matrice de **MASSE** : ( partie MILI ,  $\mathcal{S}$  )

$\rho$  densité constante par élément

Matrice de **RIGIDITE** : ( partie MILI ,  $\mathcal{S}$  )

cas isotrope : ( notel > 0 )

E module d'Young

$\nu$  coefficient de Poisson

et 8 zeros

cas anisotrope : ( notel < 0 )

$E_{ij}$  les 10 termes de la matrice  
d'élasticité

couplage thermique :  $\alpha$  coefficient de dilatation

( c'est la 11-ième valeur )

Tableau des **CONTRAINTES** : déjà fournies ou comme  
pour la rigidité

**SECOND MEMBRE** : ( partie FORC ) NDSM cas de charge

termes de surface : (  $\mathcal{S}$  )

$F(i,j,k)$  : les  $i$  cas de charges (  $i=1,NDSM$  )  
les  $j$  composantes (  $j=1,2$  )  
les  $k$  points d'intégration  
( le barycentre )

termes de bord : (  $\mathcal{L}$  )

$f(i,j,k)$  : les  $i$  cas de charges  
les  $j$  composantes  
les  $k$  points d'intégration (  $k=1,2$  )  
( 2 points de Gauss )

couplage thermique : déjà fournies dans la rigidité

contraintes initiales : (  $\mathcal{S}$  ) ( à la suite de  $F(i,j,k)$  )

$\sigma(i,j,k)$  : les  $i$  cas de charges  
les  $j$  composantes (  $j=1,4$  )  
les  $k$  points d'intégration  
( le barycentre )

Remarques :

1 : Les fonctions **utilisateur** sont possibles :

(  $\text{notel} = 20$  ( isotrope ) ou  $-20$  ( anisotrope ) )

$\rho$  par SPR0TC ,  $E$  ou  $E_{ij}$  par SPELAS ,  $\alpha$  par SPDILA

$F$  par SPEFOO ,  $f$  par SPEFOF ,  $\sigma$  par SPSIGM ( cf -14- )

2 : le tableau **2P13** du fichier POBA contient ( dans l'ordre ) :

$\text{nbpoly}$  : nombre de polynomes de base ( 3 )

$\text{npi}$  : nombre de points d'intégration ( 1 )

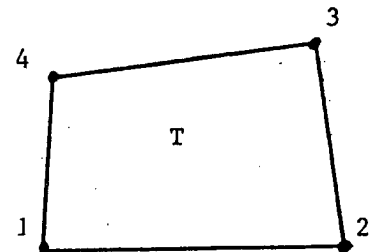
$\text{poids}(1)$  :  $\text{npi}$  poids de la quadrature

$\text{pol}(i,1)$  : valeur du polynome  $i$  au point 1

$\text{dpol}(i,j,1)$  : valeur du polynome  $i$  dérivé par rapport à la  
variable  $j$  au point 1

**ELASTICITE** AXISYMETRIQUE

**ELAS QUAD AQ1C** : QUADRANGLE à 4 noeuds  
( JERHEL ) thermoélastique



Espace  $R^2$

Inconnues : déplacement radial et axial :  $u_r$  et  $u_z$

Code : 200040

Code géométrique : 4

Interpolation : **Q1** Lagrange pour les deux déplacements

Un type de noeud : les 4 sommets

2 degrés de liberté par noeud : la valeur des déplacements ( mnémonique 'VN' )

Element de référence : le quadrangle unité

Points et noeuds coïncident partout

Les points sont définis par leur coordonnées

Pas de tableau associé

Blocage : déplacement ( radial et/ou axial ) = valeur SD BDCL

Le fichier **POBA** est nécessaire ( tableau **2Q13** )

**DONNEES** : ( en double précision )

Matrice de **MASSE** : ( partie MILI ,  $\mathcal{S}$  )

$\rho$  densité constante par élément

Matrice de **RIGIDITE** : ( partie MILI ,  $\mathcal{S}$  )

cas isotrope : ( notel > 0 )

E module d'Young

$\nu$  coefficient de Poisson

et 8 zéros

cas anisotrope : ( notel < 0 )

$E_{ij}$  les 10 termes de la matrice d'élasticité

couplage thermique :  $\alpha$  coefficient de dilatation

( c'est la 11-ième valeur )

Tableau des **CONTRAINTES** : déjà fournies ou comme  
pour la rigidité

**SECOND MEMBRE** : ( partie FORC ) NDSM cas de charge  
termes de surface : (  $\mathcal{S}$  )

$F(i,j,k)$  : les  $i$  cas de charges (  $i=1,NDSM$  )  
les  $j$  composantes (  $j=1,2$  )  
les  $k$  points d'intégration  
( 4 points de Gauss )

termes de bord : (  $\mathcal{L}$  )

$f(i,j,k)$  : les  $i$  cas de charges  
les  $j$  composantes  
les  $k$  points d'intégration (  $k=1,2$  )  
( 2 points de Gauss )

couplage thermique : déjà fournies dans la rigidité

contraintes initiales : (  $\mathcal{S}$  ) ( à la suite de  $F(i,j,k)$  )

$\sigma(i,j,k)$  : les  $i$  cas de charges  
les  $j$  composantes (  $j=1,4$  )  
les  $k$  points d'intégration  
( 4 points de Gauss )

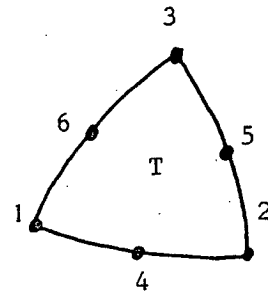
Remarques :

1 : Les fonctions **utilisateur** sont possibles :  
(  $notel = 20$  ( isotrope ) ou  $-20$  ( anisotrope ) )  
 $\rho$  par SPROTC ,  $E$   $\nu$  ou  $E_{ij}$  par SPELAS ,  $\alpha$  par SPDILA  
 $F$  par SPEFOD ,  $f$  par SPEFOF ,  $\sigma$  par SPSIGM ( cf -14- )

2 : le tableau **2Q13** du fichier POBA contient (dans l'ordre) :  
 $nbpoly$  : nombre de polynomes de base ( 4 )  
 $npi$  : nombre de points d'intégration ( 4 )  
 $poids(l)$  :  $npi$  poids de la quadrature  
 $pol(i,l)$  : valeur du polynome  $i$  au point  $l$   
 $dpol(i,j,l)$  : valeur du polynome  $i$  dérivé par rapport à la  
variable  $j$  au point  $l$

**ELASTICITE** AXISYMETRIQUE

ELAS **TRIA AP2C** : TRIANGLE à 6 noeuds  
( *PL GEORGE* ) thermoélastique



Espace  $R^2$

Inconnues : déplacement radial et axial :  $u_r$  et  $u_z$

Code : 200045

Code géométrique : 3

Interpolation : P2 Lagrange pour les deux déplacements

Un type de noeud : les 3 sommets et les 3 milieux des arêtes  
2 degrés de liberté par noeud : la valeur des déplacements ( mnémonique 'VN' )

Element de référence : le triangle unité

Points et noeuds coïncident partout

Les points sont définis par leur coordonnées

Pas de tableau associé

Blocage : déplacement ( radial et/ou axial ) = valeur SD BDCL

Le fichier **POBA** est nécessaire ( tableau 2P26 )

**DONNEES** : ( en double précision )

Matrice de **MASSE** : ( partie MILI , 5 )

$\rho$  densité constante par élément

Matrice de **RIGIDITE** : ( partie MILI , 5 )

cas isotrope : ( notel > 0 )

E module d'Young

$\nu$  coefficient de Poisson

et 8 zéros

cas anisotrope : ( notel < 0 )

$E_{ij}$  les 10 termes de la matrice  
d'élasticité

couplage thermique :  $\alpha$  coefficient de dilatation

( c'est la 11-ième valeur )

Tableau des CONTRAINTES : déjà fournies ou comme pour la rigidité

**SECOND MEMBRE** : ( partie FORC ) NDSM cas de charge  
termes de surface : ( 5 )

$F(i,j,k)$  : les i cas de charges (  $i=1,NDSM$  )  
les j composantes (  $j=1,2$  )  
les k points d'intégration  
( 7 points de Gauss )

termes de bord : ( 2 )

$f(i,j,k)$  : les i cas de charges  
les j composantes  
les k points d'intégration (  $k=1,2$  )  
( 3 points de Gauss )

couplage thermique : déjà fournies dans la rigidité

contraintes initiales : ( 5 ) ( à la suite de  $F(i,j,k)$  )

$\sigma(i,j,k)$  : les i cas de charges  
les j composantes (  $j=1,4$  )  
les k points d'intégration  
( 3 des 7 points de Gauss ( 5 3 et 7 ) )

Remarques :

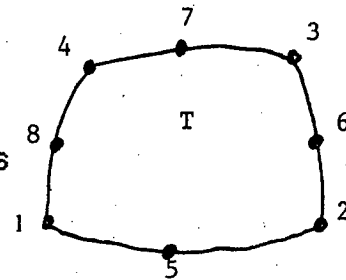
1 : Les fonctions utilisateur sont possibles :  
(  $\text{notel} = 20$  ( isotrope ) ou  $-20$  ( anisotrope ) )  
p par SPROTC , E v ou  $E_{ij}$  par SPELAS ,  $\alpha$  par SPDILA  
F par SPEF00 , f par SPEF0F ,  $\sigma$  par SPSIGM ( cf -14- )

2 : le tableau 2P26 du fichier POBA contient ( dans l'ordre ) :  
nbpoly : nombre de polynomes de base ( 6 )  
npi : nombre de points d'intégration ( 7 )  
poids(l) : npi poids de la quadrature  
pol(i,l) : valeur du polynome i au point l  
dpol(i,j,l) : valeur du polynome i dérivé par rapport à la variable j au point l



**ELASTICITE AXISYMETRIQUE**

**ELAS QUAD AQ2C** : QUADRANGLE à 8 noeuds  
( *PL GEORGE* ) thermoélastique



Espace  $R^2$

Inconnues : déplacement radial et axial :  $u_r$  et  $u_z$

Code : 200046

Code géométrique : 4

Interpolation :  $Q^*2$  Lagrange pour les deux déplacements

Un type de noeud : les 4 sommets et les 4 milieux des arêtes  
2 degrés de liberté par noeud : la valeur des déplacements ( mnémonique 'VN ' )

Element de référence : le quadrangle unité

Points et noeuds coïncident partout

Les points sont définis par leur coordonnées

Pas de tableau associé

Blocage : déplacement ( radial et/ou axial ) = valeur SD BDCL

Le fichier **POBA** est nécessaire ( tableau **2Q25** )

**DONNEES** : ( en double précision )

Matrice de **MASSE** : ( partie MILI ,  $S$  )

$\rho$  densité constante par élément

Matrice de **RIGIDITE** : ( partie MILI ,  $S$  )

cas isotrope : ( notel > 0 )

$E$  module d'Young

$\nu$  coefficient de Poisson

et 6 zéros

cas anisotrope : ( notel < 0 )

$E_{ij}$  les 10 termes de la matrice  
d'élasticité

couplage thermique :  $\alpha$  coefficient de dilatation

( c'est la 11-ième valeur )

Tableau des **CONTRAINTES** : déjà fournies ou comme pour la rigidité

**SECOND MEMBRE** : ( partie FORC ) NDSM cas de charge termes de surface : (  $\mathcal{S}$  )

$F(i,j,k)$  : les  $i$  cas de charges (  $i=1,NDSM$  )  
les  $j$  composantes (  $j=1,2$  )  
les  $k$  points d'intégration  
( 9 points de Gauss )

termes de bord : (  $\mathcal{L}$  )

$f(i,j,k)$  : les  $i$  cas de charges  
les  $j$  composantes  
les  $k$  points d'intégration (  $k=1,2$  )  
( 3 points de Gauss )

couplage thermique : déjà fournies dans la rigidité

contraintes initiales : (  $\mathcal{S}$  ) ( à la suite de  $F(i,j,k)$  )

$\sigma(i,j,k)$  : les  $i$  cas de charges  
les  $j$  composantes (  $j=1,4$  )  
les  $k$  points d'intégration  
( 4 des 9 points de Gauss ( 1 3 7 et 9 ) )

Remarques :

1 : Les fonctions **utilisateur** sont possibles :  
(  $\text{notel} = 20$  ( isotrope ) ou  $-20$  ( anisotrope ) )  
 $\rho$  par SPROTC ,  $E$   $\nu$  ou  $E_{ij}$  par SPELAS ,  $\alpha$  par SPDILA  
 $F$  par SPEF00 ,  $f$  par SPEF0F ,  $\sigma$  par SPSIGM ( cf -14- )

2 : le tableau **2Q25** du fichier POBA contient (dans l'ordre) :

$\text{nbpoly}$  : nombre de polynomes de base ( 8 )  
 $\text{npi}$  : nombre de points d'intégration ( 9 )  
 $\text{poids}(l)$  :  $\text{npi}$  poids de la quadrature  
 $\text{pol}(i,l)$  : valeur du polynome  $i$  au point  $l$   
 $\text{dpol}(i,j,l)$  : valeur du polynome  $i$  dérivé par rapport à la variable  $j$  au point  $l$

### Bibliographie

- [1] P.G. CIARLET, "The Finite Element Method for Elliptic Problems"  
North Holland 1978.
- [2] K.J. BATHE, "Finite Element Procedures in Engineering Analysis"  
Prentice Hall 1982.
- [3] P.L. GEORGE, M. VIDRASCU, "Modules de Création des Tableaux Elémentaires  
Associés aux Eléments", Brochure Modulef n°14, 1985.
- [4] P.L. GEORGE, A. PERRONNET, M. VIDRASCU, "Intégration d'un Nouvel Elément  
Fini", brochure Modulef n°95, 1983.

Imprimé en France

par

l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique